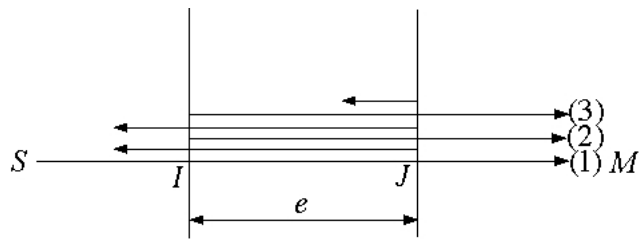
Interféromètre de Fabry-Pérot.

Première approche.

L'interféromètre est constitué de deux lames à faces parallèles ; par commodité, on ne représente pas leur épaisseur sur le schéma. Sous incidence normale, leur coefficient de réflexion est r et celui de transmission est t ; le coefficient de réflexion en énergie est $R = r^2$ et celui de transmision $T = t^2 = 1-R$. Les lames sont traitées de sorte que R soit élevé (on prendra $R = 0,96$). Les deux lames sont placées parallèlement et distantes de e ; l'air qui les sépare est assimilé au vide. On éclaire le dispositif par une source monochromatique S à l'infini dans une direction normale aux lames. Un rayon SI subit en I sur la première lame une réflexion et une transmission ; le transmis IJ subit en J sur la seconde lame une réflexion et une transmission ; le réfléchi JI subit en I sur la première lame une réflexion et une transmission et ainsi de suite. Par souci de lisibilité, on a décalé latéralement les rayons réfléchis sur le schéma, alors qu'en réalité les différents rayons IJ sont tous confondus. On considère l'interférence en un point M, à l'infini dans une direction normale, entre les différents rayons ayant traversé le dispositif directement (rayon 1), après un aller retour et donc deux réflexions, une en J et l'autre en I (rayon 2), après deux allers-retours (rayon 3), etc. Un dispositif de chariotage permet de faire varier la distance e. On appelle s_0 l'amplitude réelle du rayon incident SI.



Question 1 :
Calculer les amplitudes réelles des différents rayons transmis JM

Le rayon (1) a subit une transmission en I où son amplitude a été multipliée par t et une seconde en J où elle a subi le même sort, l'amplitude réelle de ce rayon est donc

$$s_1 = t^2\, s_0 = T\, s_0 = (1-R)\, s_0$$

Le rayon (2) a subi successivement une transmission en I, une réflexion en J, une réflexion en I et enfin une transmission en J, son amplitude a été multipliée successivement par t, r, r et t et donc :

$$s_2 = t\, r^2\, t\, s_0 = t^2\, r^2\, s_0 = T\, R\, s_0 = (1-R)\, R\, s_0$$

De la même façon on a :

$$s_3 = t\, r^4\, t\, s_0 = t^2\, r^4\, s_0 = T\, R^2\, s_0 = (1-R)\, R^2\, s_0$$

$$s_k = t\, r^{2\,(k-1)}\, t\, s_0 = t^2\, r^{2\,(k-1)}\, s_0 = T\, R^{(k-1)}\, s_0 = (1-R)\, R^{(k-1)}\, s_0$$

Question 2 :
Calculer le déphasage φ ***entre les différents rayons transmis*** JM ***et en déduire l'éclairement au point*** M

Pour les rayons successifs, les chemins optiques sont

$$[SM]_1 = [SI] + [IJ] + [JM]$$

$$[SM]_2 = [SI] + [IJ] + [JI] + [IJ] + [JM]$$

$$[SM]_3 = [SI] + [IJ] + [JI] + [IJ] + [JI] + [IJ] + [JM] \qquad \text{etc.}$$

La différence de marche entre les deux premiers rayons est donc :

$$\Delta = [SM]_2 - [SM]_1 = [IJ] + [JI] = 2\,e$$

d'où un déphasage :

$$\varphi = 2\,\pi\,\frac{\Delta}{\lambda} = 2\,\pi\,\frac{2\,e}{\lambda}$$

et il est aisé de vérifier que le déphasage entre le premier et le troisième rayon est $2\,\varphi$ et ainsi de suite.

Si l'on choisit l'origine des phases de sorte qu'elle soit nulle pour le rayon (1) à son arrivée en M, son amplitude complexe se confond avec son amplitude réelle et $\underline{s}_1 = s_1 = (1-R)\,s_0$. Le rayon (2) a une amplitude réelle $(1-R)\,R\,s_0$ et un déphasage-retard φ, d'où

$$\underline{s}_1 = (1-R)\,R\,s_0\,\exp(-\jmath\varphi)$$

Le rayon (3) a une amplitude réelle $(1-R)\,R^2\,s_0$ et un déphasage retard $2\,\varphi$, d'où

$$\underline{s}_3 = (1-R)\,R^2\,s_0\,\exp(-2\jmath\varphi)$$

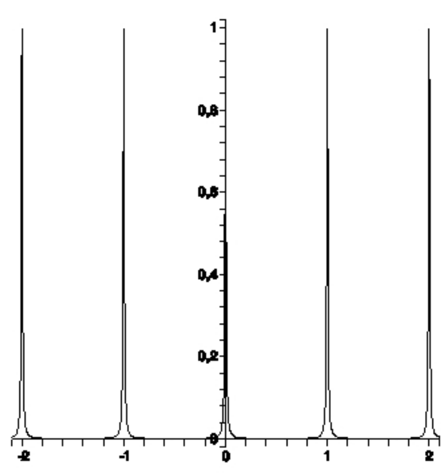
et ainsi de suite. Il y a cohérence entre ces rayons issus d'un même point source et donc additivité des amplitudes complexes, soit :

$$\underline{s}_{tot} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 + \underline{s}_3 + \cdots = (1-R)\,s_0 + (1-R)\,R\,s_0\,\exp(-\jmath\varphi) + (1-R)\,R^2\,s_0\,\exp(-2\jmath\varphi) + \cdots =$$
$$(1-R)\,s_0\,\left(1 + R\,\exp(-\jmath\varphi) + R^2\,\exp(-2\jmath\varphi) + \cdots\right) = \frac{1-R}{1-R\,\exp(-\jmath\varphi)}\,s_0$$

Pour l'éclairement, on passe au carré du module

$$\mathcal{E} = |s_{tot}|^2 = s_{tot}\,s_{tot}^* = \frac{(1-R)}{(1-R\,\exp(-\jmath\varphi))}\,\frac{(1-R)}{(1-R\,\exp\jmath\varphi)}\,s_0\,s_0^* = \frac{(1-R)^2}{1-2\,R\,\cos\varphi+R^2}\,\mathcal{E}_0$$

Question 3 :
On fait varier φ par chariotage. Tracer la courbe donnant $\mathcal{E}$ en fonction de φ (on prendra $R = 0,96$). Quel peut être l'intérêt de cet interféromètre ? Sans calcul, indiquer ce que l'on observerait avec une source large placée près des miroirs.



Voici la courbe calculée par Maple, avec en abscisse l'ordre d'interférence $p = \varphi/2\,\pi$ et en ordonnée $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$. L'important est que l'éclairement est négligeable en dehors du voisinage immédiat des ordres entiers. On retrouve la propriété essentielle du réseau de diffraction dont il a donc la qualité essentielle, séparer aisément les raies voisines. Si la source est à distance finie, le rayon initial SI est oblique et les rayons réfléchis sont en zig-zag entre les lames. Mis à part qu'il y a interférence entre de nombreux rayons au lieu de deux, on retrouve la géométrie de la lame d'air du Michelson, donc des anneaux d'égale inclinaison et leur intérêt, travailler avec une source large sans baisse de contraste si l'on observe les interférences à l'infini. L'interféromètre de Fabry-Pérot cumule donc les avantages du Michelson et du réseau de diffraction. C'est un outil exceptionnel.

Seconde approche.

En notation complexe, l'onde incidente s'écrit $\underline{s}_i\ \exp \jmath\,\omega\ (t - x/c)$

Entre les deux lames, l'interférence entre tous les rayons réfléchis IJ donne une onde progressive dans les sens des x croissants et l'interférence entre tous les réfléchis JI donne une onde progressive dans les sens des x décroissants, s'écrivant respectivement

$$\underline{s}_+\ \exp \jmath\,\omega\ (t - x/c)$$

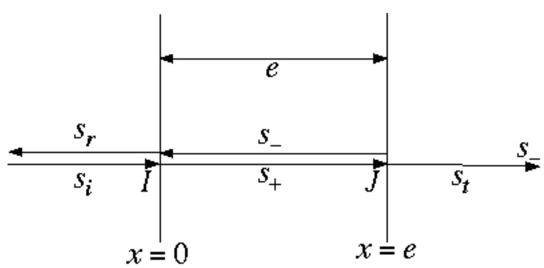
$$\underline{s}_-\ \exp \jmath\,\omega\ (t + x/c)$$

De même, à droite de la seconde lame et à gauche de la première l'interférence entre tous les rayons transmis JM et tous les réfléchis IS donne respectivement une onde transmise «globale» et une onde réfléchie «globale», s'écrivant

$$\underline{s}_t\ \exp \jmath\,\omega\ (t - x/c)$$

$$\underline{s}_r\ \exp \jmath\,\omega\ (t + x/c)$$

La première lame est en $x = 0$ et la seconde est en $x = e$.



Question 4 :
Quelle relations lient s_- et s_t à s_+ ?

Les ondes en s_- et s_t résultent de la réflexion et de la transmission, <u>en $x = e$</u>, de l'onde en s_+ qu'il suffit donc de multiplier, <u>au bon point</u>, par r et t. D'où

$$\underline{s}_-\ \exp \jmath\,\omega\ (t + e/c) = r\,\underline{s}_+\ \exp \jmath\,\omega\ (t - e/c)$$

$$\underline{s}_t\ \exp \jmath\,\omega\ (t - e/c) = t\,\underline{s}_+\ \exp \jmath\,\omega\ (t - e/c)$$

soit après simplifications

$$\underline{s}_- = r\,\underline{s}_+\ \exp \jmath\,\omega\ (-2\,e/c)$$

$$\underline{s}_t = t\,\underline{s}_+$$

où l'on n'oublie pas de voir que

$$\frac{2\,\omega\,e}{c} = 2\,\pi\,\frac{2\,f\,e}{c} = 2\,\pi\,\frac{2\,e}{\lambda} = \varphi$$

car il s'agit de deux fois le retard de phase pour la distance IJ. On réécrit donc

$$\underline{s}_- = r\,\underline{s}_+\,\exp -\jmath\,\varphi \qquad \text{(équation 1)}$$

$$\underline{s}_t = t\,\underline{s}_+ \qquad \text{(équation 2)}$$

Question 5 :
Quelle relations lient s_r et s_+ à s_i et s_- ? On justifiera sommairement un théorème de superposition

Sur la première lame, arrivent les ondes en s_i et en s_- ; la linéarité des équations de Maxwell permettent d'affirmer que les ondes qui quittent la lame sont somme de celles que l'on aurait si s_i était seule et de celles que l'on aurait avec s_- seule. L'onde s_+ est somme de s_i transmise et de s_- réfléchie ; et s_r est somme de s_i réfléchie et s_- transmise, donc après simplification par $\exp \jmath\omega t$ (on est en $x = 0$) :

$$\underline{s}_+ = t\,\underline{s}_i + r\,\underline{s}_- \qquad \text{(équation 3)}$$

$$\underline{s}_r = r\,\underline{s}_i + t\,\underline{s}_- \qquad \text{(équation 4)}$$

Question 6 :
Retrouver l'amplitude du rayon transmis par le dispositif.

Il suffit d'un peu de calme et de méthode. On reporte l'équation 1 dans l'équation 3

$$\underline{s}_+ = t\,\underline{s}_i + r^2\,\underline{s}_+\,\exp -\jmath\,\varphi$$

d'où l'on déduit

$$\underline{s}_+ = \frac{t}{1 - r^2\,\exp -\jmath\,\varphi}\,\underline{s}_i \qquad \text{(équation 5)}$$

puis on reporte l'équation 5 dans l'équation 2 et le tour est joué

$$\underline{s}_t = \frac{t^2}{1 - r^2\,\exp(-\jmath\,\varphi)}\,\underline{s}_i$$

qui est bien le résultat de la première approche car $t^2 = T = 1 - R$ et $r^2 = R$. On ne se lasse décidément pas de la beauté de la physique.